数理解析研究所講究録
第 850 巻 1993 年 139-151

非線形現象の確率的シミュレーションに於ける密度推定問題と改良

京都工芸繊維大学　小川 重義 (OGAWA Shigeyoshi) *

1 問題

確率的手法を非線形現象の数値シミュレーションに適用する際どのようなことが問題になるかを「非線形拡散過程のシミュレーション」についての筆者の最近の研究（[8], [9], [10]）に沿って考えてみたい。

拡散は典型的な統計力学的現象であるが、ここでいうのは次のような ITÔ 型確率微分方程式（以下 "SDE" と略記する）で表現される非線形現象[†]である。

$$\left.\begin{aligned} &dX_t = a(t, X_t, H(X_t : u(t)))dt + b(t, X_t, H(X_t : u(t)))dW_t, \\ &X_0(\omega) = \xi(\omega), \\ &u(t, x) = \text{the pdf. of the } \ X_t(\cdot), \\ &H(x : u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)u(t,y)dy. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここに, $W_t(\omega)$ は適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ の上で定義された実数値ブラウン運動であり $\xi(\omega)$ は pdf（分布密度） $f(x)$ を持つ確率変数とする。

未知過程 $X.(\cdot)$ の 時刻$=t$ に於ける分布密度関数 $u(t,x)$ は存在して滑らかならば次の初期値問題の解となる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\{a^H(t,x)u\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{b^H(t,x)^2 u\} \\ &u(0,x) = f(x), \quad ((t,x) \in [0,T] \times R^1) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

---

*ogawa@jpnyitp.bitnet

†McKean[4] の意味で非線形な確率微分方程式である。

ただし、 $c^H(t,x) := c(t,x,H(x:u(t))), \quad (c(\cdot) = a(\cdot),\ b(\cdot)).$

このような統計力学的現象のシミュレーションについては二通りの方法がある。一つは上の初期値問題 (2) の数値解を構成することによるものであり、今一つはその現象の基にある確率モデル (1) で定められる拡散過程 X_t の数値近似にもとづく方法である。 我々は個々の粒子のランダムな運動を通して全体現象を再現すること、即ち後者の方法に興味がある。その主な理由は、原理的には後者が前者を含むこと（ cf. SDE の解の「弱近似」或いは「密度推定」論を通じて）にあるが、統計的現象を構成する粒子集団の生の動きを模倣することはそれ自身魅力的な課題でもあると考えるからである。

簡単の為に対象を 1 次元過程の場合に限定して議論を進めるがその結果は係数に対する適当な条件（ e.g. Clark-Cameron's commutativity condition, [1] ）の下に多次元過程の場合にも適用できるものである。同様の理由により全ての係数、$a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$, $H(x)$, $f(x)$ は初期値問題 (1) が一意的な強解 $(X_t,\ u(t,x))$ を持つほどに十分に滑らかであると仮定しておく（例えば、Ogawa[8] における条件 (A.1)-(A.5) ）。

以下に於いて次の記法を使用する： 過程 X_t の近似過程は $\overline{X}_t$ で表す。また N は SDE の離散化に伴う時間区間 $[0,T]$ の分割数を表し、分点 $t_k := k\cdot h\ (h = T/N,\ 0\le k\le N)$ に於ける X_t, $\overline{X}_t$ の値を X_k, $\overline{X}_k$ で表す。確率変量 $x(\omega)$ に対して Ex は確率測度 P に関する平均値を、また $\{x(\omega^i),\ 1\le i\le N_0\}$ は independent copies を表すものとする。

2 密度推定の問題

拡散過程 X_t のシミュレーションを行うには近似過程 $\overline{X}_t$ を具体的に構成する必要があり、それは原理的には線形拡散過程の場合（ i.e. 通常の SDE の数値解

析）と同様に、原方程式 (1) を適当な差分法により離散化したモデルを逐次解くことにより得られるのであるが非線形性の故に事情は少し複雑になる。そもそも統計力学的現象が非線形であるとは個々の粒子の運動則が粒子全体の集団の統計量により規定されるということであり、そのことはとりもなおさず一個の粒子の軌道を定める為には多数の他粒子の軌道を観察しつつ行う必要があることを意味している。即ち、我々は初期変数 $\xi(\omega)$ の様々な実現値 $\{\xi(\omega^i),\ 1 \le i \le N_0\}$ に対応する近似見本過程の集団 $\{\overline{X}_t(\omega^i),\ 1 \le i \le N_0\}$ を構成する手順を誂えなければならない。 言い替えれば、モデル (1) は係数に未知解 $X_t(\omega)$ の pdf $u(t,x)$ を含むためこれを時間方向 t について離散化した場合，各ステップ毎に近似解自身（の標本） $\{\overline{X}_{t_k}(\omega^i),\ 1 \le i \le N_0\}$ からその時点での pdf $\overline{u}(t_k,x)$ を求める操作（これを以下， $\mathbf{M}\overline{u}$ で表す）が必要となる。この結果，非線形問題に於いては；(1) 離散化に依る誤差の他にこの推定操作が持ち込む誤差が介入するため誤差解析がより複雑になるばかりでなく，(2) 近似計算の実行も労力を要するものとなる。離散化による誤差は時間区間 $[0,T]$ の分割数 N（或いは離散化のピッチ $h := T/N$ ）により、また密度推定操作が持ち込む誤差は Estimator $\mathbf{M}\overline{u}$ の構成に必要な標本数 N_0 により表現されるが、これらの誤差をを同一の変数で評価するために以下の関係があるものとしておく：

$$\text{(N)} \qquad N_0 = N^{\beta} \quad (\beta > 0)$$

ところで、確率変量の分布密度推定問題は統計学において既に２５年以上の歴史を持つ大きな課題 (cf. [14]) の一つであり様々な理論と手法が提供されているが、我々は議論の一般性を保つために密度推定操作については具体的な手順を特定せずただ以下の特性を持つようなものという仮定のみを置くことにする：

$$\text{(M)} \qquad \sup_t E \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{u}(t,x) - \mathbf{M}\overline{u}(t,x)|^2 dx = O(N_0^{-2p\cdot\eta}) \quad (\exists\ \eta > 0)\ .$$

（註１） Estimator としては標本が定める経験分布の積分変換形で与えるのが一般的であるが、確率論の枠組み（” 大数の法則” ）で扱う限りこのような Estimator

の "効率" は $\eta < 1/2$ である。

Example (Kernel Method) $r(\omega)$ は $R(x)$ を pdf としてもつ確率変数とする。 $r(\omega)$ と同一分布に従う N_0- 個の独立なコピー $\{r(\omega^i), 1 \leq i \leq N_0\}$ から次の方式で $R(x)$ の推定を行う方法を "kernel method" と言う（cf. Silverman [14]）。

$$\mathbf{M}_K^\delta R(x) = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} K_\delta(x - r(\omega^i))$$

ここに， $K_\delta(x) = \dfrac{1}{\delta} K(\dfrac{x}{\delta})$ であり， $K(x)$ は通常次のようなものにとる。

$$\text{(K.1)} \qquad \int |K| dx = 1, \quad \int |xK(x)| dx < \infty, \quad \lim_{|x| \to \infty} |xK(x)| = 0 .$$

このとき $R(x)$ の連続点に於て $\lim_{\delta \to 0+} \mathbf{M}_K^\delta R(x) = R(x)$（確率収束）であることが Parzen ([13]) により示されている。我々の問題にこの方法を適用してみよう。データ $\overline{X}_t$ の pdf $\overline{u}(t, x)$ が x について十分滑らかなものである場合には以下にみるように近似の精度を具体的に評価することができる。

Proposition 2.1 (**Ogawa [9]**) *Kernel* $K(x)$ は条件 *(K.1)* の他に次の

$$\textit{(K.2):} \qquad \sup_y \frac{|1 - \tilde{K}(y)|}{|y|^r} < \infty \quad \exists r > 0 ,$$

を満たすものとする。ただし， $\tilde{K}(y)$ は $K(\cdot)$ の *Fourier* 変換である。この時，データ $\overline{X}_t$ の *pdf* $\overline{u}(t, x)$ の *Fourier* 変換 $\overline{U}(t, y)$ が上記の r に対して次の条件，

$$\textit{(U)} \qquad \overline{U}_r^2 := \sup_t \int |y^r \overline{U}(t, y)|^2 dy < \infty$$

を満たすものであれば， $\mathbf{M}_K^\delta$ による近似の *Integrated Mean Square Error :*

$$IMSE(N_0, \delta) := \int E|\overline{u}(t, x) - \mathbf{M}_K^\delta \overline{u}(t, x)|^2 dx$$

は *window width* δ の *tunning* により次のように評価される。

$$\min_{\delta>0} IMSE(N_0,\delta) \le O(N_0^{-\frac{2r}{2r+1}}). \tag{3}$$

（註２） 即ちこの方法の場合，効率は $\eta = r/(2r+1) < 1/2$ となる。

3 SDE の数値近似解

SDE(1) の離散化モデルとそれによって得られる近似過程の精度についての筆者 ([8],[9]) による最近の基本的結果をまとめておこう。

3.1 Mil'stein scheme

SDE の離散化に於いて、真の解 X_t とそれによって構成される近似解 $\overline{X}_t$ との間に評価式、

$$\max_{0\le k\le N} E|X_{t_k} - \overline{X}_{t_k}|^2 = O(h^{-s}), \quad t_k = k\cdot h$$

が成り立つとき $\overline{X}_t$ は s 次の近似を与えるという。

線形拡散過程に対応する SDE の数値近似の場合，オイラー法による近似過程の平均２乗誤差は差分ピッチ h について１次のオーダーであり，これに対して Milstein Scheme と称される差分法は２次の精度を持つことが知られている（cf.[3]）。我々の非線形問題（1）にこの差分法を適用すれば次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X}_t &= \overline{X}_k + \frac{\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k}{h}(t - t_k) \quad for \quad t_k \le t < t_{k+1} \\
\overline{X}_0 &= \xi(\omega), \\
\overline{X}_{k+1} &= \overline{X}_k + \{\overline{a}(t_k,\overline{X}_k) - \tfrac{1}{2}\overline{b}\overline{b}_x(t_k,\overline{X}_k)\}h \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\overline{b}\overline{b}_x(t_k,\overline{X}_k)(\Delta_k W)^2 + \overline{b}(t_k,\overline{X}_k)\Delta_k W.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ただし、 $X_k = X_{t_k}$, $\overline{X}_k = \overline{X}_{t_k}$ $\Delta_k W = W(t_{k+1}) - W(t_k)$,

および、　$\bar{c}(t,x) = c(t,x,H(x:\mathbf{M}\bar{u}(t))),\ \ (c(\cdot) = a(\cdot),\ b(\cdot)).$

仮定 (**M**) の下で次のことが示される。

Theorem 3.1 (Ogawa [8]) 効率 η の *Estimator* の構成に置いて $\eta{\cdot}\beta \geq 1$ が成り立つ程度に十分大きな標本数 $N_0 = N^\beta$ を使用するならば, *modified Mil'stein scheme (4)* は2次の近似を与える。更に、全区間 $[0,T]$ においては次の評価が成り立つ：

$$E[\sup_t |X_t - \overline{X}_t|^{2p}] \leq C \cdot h^\gamma (\log\ \frac{1}{h})^\epsilon,\ \ (\forall \epsilon > p),\qquad \gamma = 2p(1 \wedge \eta \cdot \beta).$$

従って上記の差分法を2次のスキームとして機能させる為には Estimator $\mathbf{M}\bar{u}$ を構成するサンプル数を $N_0 = N^\beta \geq N^{1/\eta} (\geq N^2)$ ととる必要がある。即ち、Estimator の効率 η が低ければその分だけ全体の仕事量は増大する。上の解析に基ずいて(「誤差」が高々 h^1 以内のオーダーの) シミュレーション を行った場合、近似見本過程を N_0 本発生するのに必要な手順数を見積もるならば、N ステップで一本の見本過程を発生するラインを N_0 本含むブロックを N 個必要とし、全体として都合 $N \times N_0 \times N = N^{2+\beta}$ 個の計算ステップを要することになる (Ogawa[8] の手順表を参照)。ここに非線形過程の確率的シミュレーションに於ける大きな問題点があり考察と改良が必要となる。

3.2 Heun 法と対称型 SDE

常微分方程式の数値積分との関連で触れるならば、Milstein 法は Heun 法と極めて近い関係にある。本論からは少し離れるがここでそのことについて説明しておこう。‡ Heun 法も Milstein scheme 同様2次の近似法であるが但し, その結果得られる近似過程 $\overline{X}_t$ は Itô 型 SDE としての (1) の解とは異なったものを近似する, 即ち上の定理 3.1 の一つの帰結として：

‡Milstein 法も最初は Runge-Kutta 法に基づいて導出されている (cf. [5])。

Proposition 3.1 (Ogawa [8]) $\tilde{X}_t$ を次で定まる近似過程とせよ。

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{X}_0 = \quad & \xi \\
\tilde{X}_{k+1} = \quad & a(t_k, \tilde{X}_k, H(\tilde{X}_k : \mathbf{M}\tilde{u}(t_k))) \cdot h + \frac{1}{2}\{b(t_k, \tilde{X}_k, H(\tilde{X}_k : \mathbf{M}\tilde{u}(t_k))) \\
& + b(t_k, \tilde{Y}_{k+1}, H(Y_{k+1} : \mathbf{M}\tilde{u}(t_k)))\} \cdot \Delta_k W \\
\text{ここに} \quad & Y_k \ \text{は次で定まる予測子である} \\
Y_{k+1} = \quad & \tilde{X}_k + a(t_k, \tilde{X}_k, H(\tilde{X}_k : \mathbf{M}\tilde{u}(t_k))) \cdot h + \\
& b(t_k, \tilde{X}_k, H(\tilde{X}_k : \mathbf{M}\tilde{u}(t_k))) \cdot \Delta_k W.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$\tilde{X}_t$ を対称積分 (*cf. Ogawa[11]*) の意味で解釈した *SDE (1)* の強解とすれば，定理 *3.1* と同様次の結果が成り立つ。

$$E[\sup_t |\tilde{X}_t - \tilde{X}_t|^{2p}] \le C \cdot h^{\gamma)} (\log \frac{1}{h})^{\epsilon}, \quad (\forall \epsilon > p).$$

3.3 PDE(2) の数値解を求めること

我々の課題は非線形拡散過程 $\overline{X}_t$ のモンテ・カルロ シミュレーション の方法と問題点について考察することであったが，問題が非線形である為その過程で **Cauchy** 問題 **(2)** の数値解を構成することにもなった。ついでであるからここで、上の **Kernel** 法で構成される **Estimator** $\mathbf{M}_K^{\delta}\overline{u}$ が **PDE (2)** の数値近似解としてどの程度に良好なものであるかを調べておくことにする。
これまでと同様の記号を使うことにするが，理屈の上ではここで使用する **Kernel** $K(x)$ と **window width** δ は近似過程 $\overline{X}_t$ の構成で使用したものと同一である必要はないことを注意しておく。

Proposition2.1 と Theorem3.1、を組み合わせれば次の結果が得られる。

Theorem 3.2 (Ogawa [8]) 精度 η と *sample* 数 $N_0 (= N^{\beta})$ は条件 : $\eta \cdot \beta = 1$ を満たすものとする。 また 真の解 $u(t, x)$ の近似のために使用され

る *kernel* $K(x)$ は条件 *(K.1), (K.2)* を満たすものとする。この時，真の解 u が条件 *(U)* を満たすならば，*estimator* $\mathbf{M}_K^\delta \overline{u}(t,x)$ は次の評価を満たす。

$$\min_\delta IMSE(\mathbf{M}_K^\delta \overline{u}, u : \delta) = O(h^{\eta'}(\log \frac{1}{h})^{\epsilon'}), \quad \eta' = \frac{4r}{2r+3}, \quad (\forall \epsilon' \geq \frac{2r}{2r+3}),$$

ここに、 $IMSE(\mathbf{M}_K^\delta \overline{u}, u : \delta) := E\int |\mathbf{M}_K^\delta \overline{u}(t,x) - u(t,x)|^2 dx.$

4 シミュレーションに於ける問題点と改良

非線形問題に於いてはいわゆる **Density Estimation** の手法と精度が重要な意味を持つこと、そしてこれに対して従来の「**Kernel** 法」がどの程度のことを成し得るのかは既に見た通りである（**cf.[8],[9],[14]**）。**Density Estimation** の方法は **Kernel** 法 に限るものではないが、どのような方法にせよ経験分布の積分変換の如く「大数の法則」に基づくもので限り **Estimator** の効率は常に $\eta < 1/2$ の範囲に留まりシミュレーション手順に於ける大幅な改良は望むべくもない。ここでは視点を変えて **"deterministic estimator** の方法"（**Ogawa[12]**）について紹介する。これは **stochastic** な考察から導かれる方法であるが **deterministic** である為 **stochastic estimator** の方法に付随していた諸問題、例えば同時に数多くの近似見本過程を生成する作業、から我々を解放してくれる利点がある。以下簡単のために退化しない場合、 $|b(t,x,y)| > \exists c > 0$ 、について説明する。

手始めに次のことに注意しよう、即ち： 離散化モデル **(4)** において、 **estimator** $\mathbf{M}\overline{u}$ は $\overline{u}(t,x)$ 自身であって良い事、更に、いずれの形を用いるにせよ **density** は常に積分形 $H(x : \mathbf{M}\overline{u}(t_k))$ 或いは $H(x : \overline{u}(t_k))$ で現れる事である。従って、**density estimator** を構成する操作はまづ拡散過程 X_t の「弱近似」（**cf.[3]**）を求める事に帰着される。

よく知られた **Mil'stein** の定理（**cf.[6]**）によれば以下の **Euler- Maruyama** 型 **scheme (6)** で定まる近似過程 Y_k は **Theorem3.1** で構成した近似過程 $\overline{X}_k$ と同

じく X_t に対して１次の弱近似[§]を与える事がわかっている。

$$\left.\begin{aligned} &Y_{k+1} := Y_k + a_k^Y(Y_k)\cdot h + b_k^Y(Y_k)\cdot\zeta_k, \quad Y_0 = \xi, \\ &c_k^Y(x) = c(t_k, x, H(x : u^Y(t_k))), \quad u^Y = \text{pdf of } Y_k. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここに、$\{\zeta_k\}$ は $E(\zeta_k^2) = h$ なる条件を満たし、任意の対称な分布に従う i.i.d. 列である。

（註３） $\zeta_k = \Delta_k W$ ととれば (6) は通常の Euler- Maruyama 差分式となる。

特に、 $H(x)$ が十分滑らかで有界な台を持てば、次の評価が成り立つ。

$$\max_k \sup_x |EH(x - X_k) - EH(x - Y_k)| = O(N^{-1}),$$
$$\max_k \sup_x |EH(x - X_k) - EH(x - \overline{X}_k)| = O(N^{-1}).$$

従って、

$$\max_k \sup_x |H(x : \overline{u}(t_k)) - H(x : u^Y(t_k))| = O(N^{-1}).$$

ところで、定義式 (6) より容易にわかるように Y_k の pdf. $u^Y(k,x)$ $(0 \le k \le N)$ は以下のように容易に求める事ができる。即ち、$\zeta(\omega)$ の pdf を $\phi^h(\cdot)$ とすれば、次の漸化式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &u^Y(k+1, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k^h(x,y) u^Y(k,y)dy, \quad u^Y(0,x) = f(x) \\ &\phi_k^h(x,y) = \frac{1}{b_k^Y(y)}\phi\{\frac{x - y - a_k^Y(y)\cdot h}{b_k^Y(y)}\}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

紙数の都合でここでは詳しく書かないが、 $\zeta(\omega)$ の選び方次第で Y_k の pdf $u^Y(t_k, x)$ は効率よく求められる事を注意しておきたい。

以上より次の結果に至る。

[§] 過程 Y_t は十分に滑らかな任意の $f(x)$ にたいして、 $|f(X_t) - f(Y_t)| = O(h^{-s})$ である時 X_t の s 次の弱近似を与えるという。

Proposition 4.1 非線形拡散過程 X_t の2次の（強）近似を対象とする限り、定理 *3.1*（或いは、命題 *3.1*）に与える近似公式に於いて ***Estimator*** $\mathbf{M}\overline{u}$ として *(7)* で定められる近似 ***pdf*** u^Y を用いる事ができる。

5 後記

SDE で表現される統計力学的現象のより直接的な描像を得るために個々の粒子の軌道をシミュレートしたいというのが SDE の解の強近似理論の背後にある考えであろう。この問題も対象が非線形 SDE である場合には従来の強近似理論の枠組みには納まらず、議論は必然的に密度推定や弱近似問題にまで波及していくという次第である。以下前者の問題について関連事項を思いつくままに記しておく。

- Density Estimation には Kernel 法のほかにも、射影法、最尤法（cf. Tanabe-Sagae [15]）等様々なものがある（cf. Silverman[14]）。第2節の命題 2.1 に示した Kernel 法の有効性は条件 (K.1)-(K.2) を満たす Kernel $K(x)$ がいかに効率よく構成できるかに大きく左右される。この事情は射影法に於いても同じであって、理論上好都合な射影核が如何に簡便に構成できるかが問題となる。

- Kerkyacharian-Picard 達（[2]）は Wavelet 理論を応用して射影法に関する興味深い結果を得ている。それは、kernel 法について我々が Proposition 2.1 にて得た評価に対応する（更にシャープにした）結果である。

  1. 問題を適当な Besov space $B_{s,p,q}$ における関数近似問題としてとらえ、真の密度 $f(x) \in B_{s,p,q}$ をそれより"低次"な空間 $B_{s',p,q'}$, $(s > s' > 0,\ q' \geq q)$ に属する estimator で近似することを考える。
  2. 推定すべき density $f(x)$ よりも滑らかな C^r 級の Daubechies' Wavelet $\phi(x)$ を一つ定める、即ち；

(a) supp ϕ = compact, で $\{\phi(x-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ は $L^2(R)$ の orthonormal family であり、

(b) $\{\phi_{j,k},\ k\in\mathbf{Z}\}$（ただし、$\phi_{j,k}(x)=2^{j/2}\phi(2^j x-k)$）, が張る部分空間を V_j とする時、関係 $V_j\subset V_{j+1}$ 及び $\bigcap_{j\in Z}V_j=0$, $L^2(R)=\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}$ が成り立つ。

3. 大きさ N の標本 $\{X_k,\ 1\le k\le N\}$ が与えられたとして経験分布 $dF_N(x)$ の適当な解像度 $j(N)$ の部分空間 $V_{j(N)}$ への正射影として estimator $f^*(x)$ を構成する、すなわち: $f^*(x)=\int E_{j(N)}(x,y)dF_N(y)$, ただし $E_j(x,y)$ は V_j への射影作用素の積分核である。

4. Kerkyacharian-Picard [2] の主張は，近似の良さを低次の Besov space $B_{s',p,q'},(r>s>s'>0,\ q'\ge q)$ における f と f^* との距離の 2 乗の（分布 $f(\cdot)$ に関する）平均値で評価するとして，この estimator $f^*(x)$ が space $B_{s',p,q'}$ の中ではある意味で最適の estimator であるという点にある。

5. 解像度 $j(N)$ の取り方に自由度があるが、例えば、$j(N)=N^{(1/1+2s)}$ ととれば、我々が Proposition2.1 で kernel 法について得たのと同程度に良好な estimator が得られている事が [2] に示されている。

- 一方、筆者が本稿で示した kernel 法の場合、条件 (K.1)-(K.2) を満たす kernel $K(x)$ が Wavelet 理論の応用として構成できる事が最近 直野健氏（[7]）により示されている事をつけ加えておこう。

– (1993,07.25 記) –

参考文献

[1] Clark,J.M.C. and Cameron,R.J.: The maximum rate of convergence of discrete approximations for stochastic differential equations, Stochastic differential systems, B.Grigelionis (ed.) *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 25, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[2] Kerkyacharian,G. & Picard,D.: Density estimation in Besov spaces, *Thèse*, Univ.de Nancy-I, 1992

[3] Kloeden,P.E. and Platen,E.: *Review* A survey of numerical methods for stochastic differential equations, *Stochastic Hydrol.Hydraul.* 3, pp.155-178, 1989

[4] McKean,H.P.: A class of markov processes associated with nonlinear parabolic equations, *Proc.of Nat.Acad.Sci.*, pp.1907-1911, 1966

[5] Mil'stein,G.N.: Approximation integration of stochastic differential equations, *Theory of Proba.Appl.*, 19, pp.557-562, 1974

[6] Mil'stein,G.N.: A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations, *Theory of Proba. Appl.*, 23, 1976

[7] Naono,K.: *private communication*

[8] Ogawa,S.: Monte Carlo Simulation of Nonlinear Diffusion Processes, II, *to appear in Japan J. Indust.Appl.Math.* 1993,

[9] Ogawa,S.: Monte Carlo Simulation of Nonlinear Diffusion Processes, *Japan J. Indust.Appl.Math.* vol.9, No.1, pp.25-33 1992, Kinokuniya

[10] Ogawa,S.: Simulation de processus de diffusion nonlinéaires, *dans "Probabilités Numériques"* edité par N.Bouleau et D.Talay, INRIA, 1992

[11] Ogawa,S.: Topics in the theory of noncausal stochastin integral equations, *in "Diffusion Processes and The Related Problems in Analysis"*, etd.by M.Pinsky, 1991, Birkhäuser Boston

[12] Ogawa,S.: Some problems in the simulation of nonlinear diffusion processes, *talk at the* "Colloque sur Les Probabilités Numériques" (held in Paris, 1993 March).

[13] Parzen,E.: On the estimation of a probability density function and mode, *Ann.Math.Statist.*, 33, pp.1065-1076, 1962

[14] Silverman,W.: *"Density Estimation"*, Chapman and Hall, London, 1986

[15] Tanabe,K. & Sagae,M.: Research Memorandum No.442, 1992, ISM.